Линейни операции с вектори

Янис Василев, ianis@ivasilev.net

9 декември 2018

Това е тема 2 от конспекта за 2018-2019г. с пълно доказателства на теорема 2.

Определение. Нека u е (свободен) вектор и $\overrightarrow{AB}$ е представител на u. Векторът $-u$ с представител $\overrightarrow{BA}$ се нарича противоположен на u.

Коректност. Нека $\overrightarrow{AB} = u$ и $\overrightarrow{CD} = u$. Ще покажем, че $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$, т.е. $\overrightarrow{DC} = -u$.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \implies \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} \implies \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \implies \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}.$$

Следователно $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{DC}$ са представители на един и същ свободен вектор и дефиницията е коректна. □

Определение. Нека $\overrightarrow{u}$ и $\overrightarrow{v}$ са вектори и т. O е произволна. Нека т. $P : \overrightarrow{OP} = u$ и т. $Q : \overrightarrow{PQ} = v$. Сума на векторите u и v наричаме вектора $u + v$ с представител $\overrightarrow{OQ}$.

Коректност. Нека O' е различна от O точка и т. $P' : \overrightarrow{O'P'} = u$ и т. $Q' : \overrightarrow{P'Q'} = v$. Имаме

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O'P'} \implies \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{PP'} \\ \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'} \implies \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'} \end{aligned}\right\} \implies \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{QQ'} \implies \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{O'Q'},$$

т.е $\overrightarrow{OQ}$ и $\overrightarrow{O'Q'}$ са представители на един вектор и дефиницията е коректна. □

Теорема 1. *Събирането на вектори има следните основни свойства (за произволни u, v и w):*

1. $v + u = u + v$ *(комутаивност)*
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$ *(асоциативност)*
3. $u + 0 = u$
4. $u + -u = 0$

Доказателство.

1. Нека т. O е произволна. Избираме т. $P : \overrightarrow{OP} = u$, т. $Q : \overrightarrow{PQ} = v$ и т. $R : \overrightarrow{OR} = v$. Тогава

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{PQ} \implies \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{RQ} \implies \overrightarrow{RQ} = u \implies \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RQ} = v + u.$$

2. Нека т. O е произволна. Избираме т. $P : \overrightarrow{OP} = u$, т. $Q : \overrightarrow{PQ} = v$ и т. $R : \overrightarrow{QR} = v$. Тогава $\overrightarrow{OQ} = u + v$ и $\overrightarrow{OR} = (u + v) + w$. Но $\overrightarrow{PR} = v + w$ и следователно $\overrightarrow{OR} = u + (v + w) \implies (u + v) + w = u + (v + w)$.

3. Нека т. O е произволна и т. $P : \overrightarrow{OP} = u$. Имаме, че $\overrightarrow{PP} = 0 \implies u = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP} = u + 0$.

4. Нека т. O е произволна и т. $P : \overrightarrow{OP} = u$. Тогава $u + -u = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PO} = \overrightarrow{OO} = 0$.

$\square$

Следствие 1. *Сумата на краен брой вектори е асоциативна и комутативна.*

Определение. Разлика на векторите u и v се нарича векторът $u - v := u + (-v)$.

Определение. Произведение на вектора u с числото $\lambda \in \mathbb{R}$ наричаме вектора v, дефиниран по следния начин:

1. Ако $\lambda = 0$ или $u = 0$, то $v = 0$.

2. Ако $\lambda \neq 0$ и $u \neq 0$, то за произволна т. O:

   Нека т. $P : \overrightarrow{OP} = u$. Нека Q е точката върху правата OP, за която $|OQ| = |\lambda|\,|OP|$ (при зададена единична отсечка за измерване на дължини) и:
   - $\overrightarrow{OQ} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OP}$ ако $\lambda > 0$
   - $\overrightarrow{OQ} \uparrow\downarrow \overrightarrow{OP}$ ако $\lambda < 0$.

   Тогава v е векторът с представител $\overrightarrow{OQ}$.

Коректност. (за ненулеви вектори и $\lambda \neq 0$)

- Независимост от единичната отсечка:
  Нека с $|\cdot|$ означим дължините на векторите спрямо една единична отсечка, а с $\|\cdot\|$ - дължините спрямо втора отсечка. Тогава, ако c е дължината на първата отсечка спрямо втората, имаме

  $$\|OQ\| = c\,|OQ| = c\lambda\,|OP| = \lambda(c\,|OP|) = \lambda\,\|OP\|$$

  и следователно дефиницията не зависи от избора на единична отсечка.

- Независимост от изборът на т. O:

  Нека т. O' е различна от т. O точка и т. $P' : \overrightarrow{O'P'} = u$. Нека т. Q' е такава, че $|O'Q'| = |\lambda|\,|O'P'|$ и:

$$\begin{aligned} \lambda > 0 &: \overrightarrow{O'Q'} \upuparrows \overrightarrow{O'P'} \\ \lambda < 0 &: \overrightarrow{O'Q'} \uparrow\downarrow \overrightarrow{O'P'} \end{aligned}$$

  Тъй като $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OQ}$ са представители на u, то

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O'P'} \implies |OP| = \left|O'P'\right| \text{ и } \overrightarrow{OP} \upuparrows \overrightarrow{O'P'}.$$

  Тогава $|O'Q'| = |\lambda|\,|O'P'| = |\lambda|\,|OP| = |OQ|$ и:

$$\left.\begin{aligned} \lambda > 0 &: \overrightarrow{OQ} \upuparrows \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OP} \upuparrows \overrightarrow{O'P'} \text{ и } \overrightarrow{O'P'} \upuparrows \overrightarrow{O'Q'} \\ \lambda < 0 &: \overrightarrow{OQ} \uparrow\downarrow \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OP} \upuparrows \overrightarrow{O'P'} \text{ и } \overrightarrow{O'P'} \uparrow\downarrow \overrightarrow{O'Q'} \end{aligned}\right\} \implies \overrightarrow{OQ} \upuparrows \overrightarrow{O'Q'},$$

  т.е. $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{O'Q'} \implies$ дефиницията не зависи от избора на т. O.

$\square$

Теорема 2. *Умножението на вектор с число има следните основни свойства (за произволни $u, v \in V_n$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:*

5. $1 \cdot u = u$

6. $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$ *(асоциативност)*

7. $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$ *(дистрибутивност относно събирането на скалари)*

8. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ *(дистрибутивност относно събирането на вектори)*

Доказателство.

5. Ако $u = 0$, то $1 \cdot u = 1 \cdot 0 = 0 \implies 1 \cdot u = u$.

   Ако $u \neq 0$, избираме произволна т. O и т. $P : \overrightarrow{OP} = u$. Нека т. $Q : |OQ| = |1|\,|OP| = |OP|$ и $\overrightarrow{OQ} \upuparrows \overrightarrow{OP}$. Тогава $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} \implies P = Q$ и $1 \cdot u = u$.

6. Ако $u = 0$, то

$$\lambda(\mu \cdot u) = \lambda(\mu 0) = \lambda 0 = 0 = (\lambda \cdot \mu)0 = (\lambda \cdot \mu)u.$$

   Ако $\lambda = 0$, то

$$\lambda(\mu \cdot u) = 0(\mu 0) = 0 = 0 \cdot u = (0 \cdot \mu)u = (\lambda \cdot \mu)u.$$

Ако $\mu = 0$, то

$$\lambda(\mu \cdot u) = \lambda(0 \cdot u) = \lambda 0 = 0 = 0 \cdot u = (\lambda \cdot 0)u = (\lambda\mu)u.$$

Нека сега $u \neq 0, \lambda \neq 0$ и $\mu \neq 0$. Нека т. O е произволна, т. $P : \overrightarrow{OP} = u$, т. $Q : \overrightarrow{OQ} = \mu u$, т. $R : \overrightarrow{OR} = \lambda(\mu u)$и т. $S : \overrightarrow{OS} = (\lambda\mu)u$.

Във всички случаи

$$|OR| = |\lambda|\,|\mu u| = |\lambda|\,|\mu|\,|u| = |\lambda\mu|\,|u| = |OS|\,.$$

За да докажем, че $\overrightarrow{OR} \upuparrows \overrightarrow{OS}$, ще разгледаме четири случая:

а) ако $\lambda > 0$ и $\mu > 0$:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda\mu > 0 \implies \overrightarrow{OS} \upuparrows \overrightarrow{OP} \\ \overrightarrow{OP} \upuparrows \overrightarrow{OQ} \text{ и } \overrightarrow{OQ} \upuparrows \overrightarrow{OR} \implies \overrightarrow{OP} \upuparrows \overrightarrow{OR}\end{array}\right\} \implies \overrightarrow{OS} \upuparrows \overrightarrow{OR},$$

б) ако $\lambda < 0$ и $\mu < 0$:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda\mu > 0 \implies \overrightarrow{OS} \upuparrows \overrightarrow{OP} \\ \overrightarrow{OP} \updownarrows \overrightarrow{OQ} \text{ и } \overrightarrow{OQ} \updownarrows \overrightarrow{OR} \implies \overrightarrow{OP} \upuparrows \overrightarrow{OR}\end{array}\right\} \implies \overrightarrow{OS} \upuparrows \overrightarrow{OR},$$

в) ако $\lambda > 0$ и $\mu < 0$:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda\mu < 0 \implies \overrightarrow{OS} \updownarrows \overrightarrow{OP} \\ \overrightarrow{OP} \updownarrows \overrightarrow{OQ} \text{ и } \overrightarrow{OQ} \upuparrows \overrightarrow{OR} \implies \overrightarrow{OP} \updownarrows \overrightarrow{OR}\end{array}\right\} \implies \overrightarrow{OS} \upuparrows \overrightarrow{OR},$$

г) ако $\lambda < 0$ и $\mu > 0$:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda\mu < 0 \implies \overrightarrow{OS} \updownarrows \overrightarrow{OP} \\ \overrightarrow{OP} \upuparrows \overrightarrow{OQ} \text{ и } \overrightarrow{OQ} \updownarrows \overrightarrow{OR} \implies \overrightarrow{OP} \updownarrows \overrightarrow{OR}\end{array}\right\} \implies \overrightarrow{OS} \upuparrows \overrightarrow{OR}.$$

Във всички случаи получаваме

$$\overrightarrow{OS} \upuparrows \overrightarrow{OR} \implies (\lambda\mu)u = \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OR} = \lambda(\mu u).$$

За да докажем 7., ще използваме следните две леми:

Лема 1. *За всеки вектор u имаме* $(-1)u = -u$.

Доказателство. Ако $u = 0$, то $(-1)u = (-1)0 = 0 = -u$ и твърдението е доказано.

Нека $u \neq 0$, т. O е произволна и т. $P : \overrightarrow{OP} = u$. Нека т. $Q : \overrightarrow{OQ} \updownarrows \overrightarrow{OP}$ и $|OQ| = |OP|$, т.е. $\overrightarrow{OQ} = (-1)u$. Следователно

$$|OQ| = |PO| \text{ и } \overrightarrow{OQ} \upuparrows \overrightarrow{PO} \implies (-1)u = \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{PO} = -u.$$

$\square$

Лема 2. *За всеки вектор u и за всяко $\lambda \in \mathbb{R}$ е изпълнено*

$$(-\lambda)u = -(\lambda u) = \lambda(-u).$$

Доказателство.

$$\left.\begin{aligned} (-\lambda)u &= ((-1)\lambda)u \overset{6.}{=} (-1)(\lambda u) \overset{\text{л.1}}{=} -(\lambda u) \\ (-\lambda)u &= (\lambda(-1))u \overset{6.}{=} \lambda((-1)u) \overset{\text{л.1}}{=} \lambda(-u) \end{aligned}\right\} \implies (-\lambda)u = -(\lambda u) = \lambda(-u).$$

□

7. Ако $u = 0$, то

$$(\lambda+\mu)u = (\lambda+\mu)0 = 0 = 0 + 0 = \lambda 0 + \mu 0 = \lambda u + \mu u.$$

Ако $\lambda = 0$, то

$$(\lambda+\mu)u = \mu u = 0 + \mu u = 0u + \mu u = \lambda u + \mu u.$$

Ако $\mu = 0$, то

$$(\lambda+\mu)u = \lambda u = \lambda u + 0 = \lambda u + 0u = \lambda u + \mu u.$$

Нека сега $u \neq 0, \lambda \neq 0$ и $\mu \neq 0$. Нека т. O е произволна, т. $P : \overrightarrow{OP} = u$, т. $Q : \overrightarrow{OQ} = \lambda u$, т. $R : \overrightarrow{QR} = \mu u$и т. $S : \overrightarrow{OS} = (\lambda+\mu)u$. Отново разглеждаме четири случая:

а) ако $\lambda > 0$ и $\mu > 0$:

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{OP} \upuparrows \overrightarrow{OQ} \\ \overrightarrow{OP} \upuparrows \overrightarrow{QR} \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} \overrightarrow{OP} \upuparrows \overrightarrow{OR} \\ \\ \overrightarrow{OP} \upuparrows \overrightarrow{OS} \end{aligned}\right\} = \overrightarrow{OS} = (\lambda+\mu)u \upuparrows \lambda u + \mu u = \overrightarrow{OR}.$$

Освен това

$$|(\lambda+\mu)u| = |\lambda+\mu|\,|u| = (|\lambda| + |\mu|)\,|u| = |\lambda|\,|u| + |\mu|\,|u| = |\lambda u| + |\mu u|\,.$$

Следователно $(\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu u$.

б) ако $\lambda < 0$ и $\mu < 0$:

$$\begin{aligned} (\lambda+\mu)u &= (-(\lambda+\mu)(-1))u \overset{\text{л.2}}{=} (-(\lambda+\mu))(-u) = \\ &= (-\lambda-\mu)(-u) \overset{\text{а)}}{=} (-\lambda)(-u) + (-\mu)(-u) \overset{\text{л.2}}{=} \lambda u + \mu u \end{aligned}$$

в) ако $\lambda > 0$ и $\mu < 0$:

i. ако $\mu = -\lambda$, то

$$(\lambda + \mu)u = 0u = 0 = \lambda u + (-(\lambda u)) \overset{\text{л.2}}{=} \lambda u + \mu u.$$

ii. ако $\lambda + \mu > 0$, използваме а) за положителните числа $\lambda + \mu$ и $-\mu$:

$$\begin{aligned} \lambda u &= (\lambda + \mu - \mu)u \\ \lambda u &= (\lambda + \mu)u + (-\mu)u \,\Big|\, \bullet + \mu u \\ \lambda u + \mu u &= (\lambda + \mu)u + (-\mu)u + \mu u \\ \lambda u + \mu u &= (\lambda + \mu)u. \end{aligned}$$

iii. ако $\lambda + \mu < 0$, използваме а) за положителните числа λ и $-(\lambda + \mu)$:

$$\begin{aligned} -\mu u &= (\lambda - \lambda - \mu)u \\ -\mu u &= \lambda u + (-(\lambda + \mu))u \,\Big|\, \bullet + \mu u \\ 0 &= \lambda u + (-(\lambda + \mu))u + \mu u \,\Big|\, \bullet + (\lambda + \mu)u \\ (\lambda + \mu)u &= \lambda u + \mu u. \end{aligned}$$

г) ако $\lambda < 0$ и $\mu > 0$, доказателството е аналогично на в) с размяна на λ и μ.

Преди да докажем 8., ще докажем още една лема:

Лема 3. *За произволни вектори u и v е изпълнено $-(u + v) = -u - v$.*

Доказателство.

$$\begin{aligned} (u + v) + (-(u + v)) &= 0 \\ u + (-(u + v)) + v &= 0 \,\Big|\, -u + \bullet - v \\ -u + u + (-(u + v)) + v - v &= -u - v \\ -(u + v) &= -u - v \end{aligned}$$

□

8. Ако $u = 0$, то
$$\lambda(u + v) = \lambda v = 0 + \lambda v = \lambda u + \lambda v.$$

Ако $v = 0$, то
$$\lambda(u + v) = \lambda u = \lambda u + 0 = \lambda u + \lambda v.$$

Ако $\lambda = 0$, то

$$\lambda(u+v) = 0(u+v) = 0 = 0+0 = 0u + 0v = \lambda u + \lambda v.$$

Нека сега $u \neq 0, v \neq 0$ и $\lambda \neq 0$. Нека т. O е произволна, т. $P : \overrightarrow{OP} = u$, т. $Q : \overrightarrow{OQ} = v$, т. $P' : \overrightarrow{OP'} = \lambda u$ и т. $Q' : \overrightarrow{OQ'} = \lambda(u+v)$. Разглеждаме два случая:

a) Ако O, P и Q са на една права, то от дефиницията за умножение на вектор с число $v = \mu u$ за някое μ. Тогава

$$\lambda(u+v) = \lambda(u+\mu u) \overset{7.}{=} \lambda((1+\mu)u) \overset{6.}{=} (\lambda(1+\mu))u = \\ = (\lambda + \lambda\mu))u \overset{7.}{=} \lambda u + (\lambda\mu)u \overset{6.}{=} \lambda u + \lambda(\mu u) = \lambda u + \lambda v.$$

Нека сега O, P и Q не са на една права.

i. ако $\lambda > 0$, тогава триъгълниците ΔOPQ и $\Delta OP'Q'$ са подобни, тъй като $\angle(OPQ)$ и $\angle(OP'Q')$ съвпадат, $\overrightarrow{OP'} = \lambda\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OQ'} = \lambda\overrightarrow{OQ}$. Следователно $\overrightarrow{P'Q'} = \lambda\overrightarrow{PQ} = \lambda v$ и значи

$$\lambda(u+v) = \lambda\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{P'Q'} = \lambda\overrightarrow{OP} + \lambda\overrightarrow{PQ} = \lambda u + \lambda v.$$

ii. ако $\lambda < 0$, твърдението следва от

$$\lambda(u+v) \overset{\text{л.2}}{=} (-\lambda)(-(u+v)) \overset{\text{л.3}}{=} (-\lambda)(-u-v) \overset{\text{i.}}{=} \\ = (-\lambda)(-u) + (-\lambda)(-v) \overset{\text{л.2}}{=} \lambda u + \lambda v.$$

□

Теорема 3. *С въведените операции събиране на вектори и умножение на вектор с число, векторите във $V_n, n = 1,2,3$ образуват n-мерно реално линейно пространство.*

Твърдение 1. *Събирането на вектори и умножението на вектор с число има още следните свойства:*

1. $-0 = 0$
2. $-(-u) = u$
3. *Ако* $u + w = v + w$, *то* $u = v$
4. $-(u+v) = -u - v$
5. $0 \cdot u = 0$
6. $\lambda \cdot 0 = 0$

7. *Ако* $\lambda u = 0$, *то* $\lambda = 0$ *или* $u = 0$

8. *Ако* $\lambda u = \lambda v$ *и* $\lambda \neq 0$, *то* $u = v$

9. *Ако* $\lambda u = \mu u$ *и* $u \neq 0$, *то* $\lambda = \mu$

10. $(-1)u = -u$

11. $(\lambda - \mu)u = \lambda u - \mu u$

12. $\lambda(u - v) = \lambda u - \lambda v$